Das Bernoullidreieck

Edgar Sänger

2. Mai 2021

Zusammenfassung

Es geht um die Summe der Potenzen der Natürlichen Zahlen.

Zu deren Berechnung werden hier im Gegensatz zur Faulhaberformel die Bernoulli-Zahlen nicht nur nicht benötigt, sondern sie fallen nebenbei an.

Es wird der Name Bernoullidreieck begründet und eine erstaunliche Ähnlichkeit mit dem Pascaldreieck diskutiert.

1 Eine Einladung

Die ersten fünf Formeln für die Summen von Potenzzahlen sind

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} i^0 &&= \frac{1}{1}n^1 \\
\textit{(Natürliche Zahlen)} \quad & \sum_{i=1}^{n} i^1 &&= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\
\textit{(Quadratzahlen)} \quad & \sum_{i=1}^{n} i^2 &&= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
\textit{(Kubikzahlen)} \quad & \sum_{i=1}^{n} i^3 &&= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{0}{1}n \\
\textit{(Biquadratzahlen)} \quad & \sum_{i=1}^{n} i^4 &&= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{0}{1}n^2 - \frac{1}{30}n
\end{aligned}
$$

Die rot markierten Zahlen ergeben ein hübsches Dreieck, das auf mich wie eine Einladung wirkt, es nach unten für beliebige Exponenten fortzusetzen.

$$
\begin{aligned}
1^0 + 2^0 + 3^0 &= {}^1\!/_1 \cdot 3^1 &&= 3 \\
1^1 + 2^1 + 3^1 &= {}^1\!/_2 \cdot 3^2 + {}^1\!/_2 \cdot 3^1 &&= 6 \\
1^2 + 2^2 + 3^2 &= {}^1\!/_3 \cdot 3^3 + {}^1\!/_2 \cdot 3^2 + {}^1\!/_6 \cdot 3^1 &&= 14 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 &= {}^1\!/_4 \cdot 3^4 + {}^1\!/_2 \cdot 3^3 + {}^1\!/_4 \cdot 3^2 + {}^0\!/_1 \cdot 3^1 &&= 36 \\
1^4 + 2^4 + 3^4 &= {}^1\!/_5 \cdot 3^5 + {}^1\!/_2 \cdot 3^4 + {}^1\!/_3 \cdot 3^3 + {}^0\!/_1 \cdot 3^2 - {}^1\!/_{30} \cdot 3^1 &&= 98
\end{aligned}
$$

2 Das Dreieck

Das Bernoullidreieck wird zwar erst weiter unten mathematisch abgeleitet; aber weil seine rechte Kante für die Namensgebung wichtig ist, soll es schon hier zu Anfang gezeigt werden.

i	**Koeffizienten** $a_{k,i}$										
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1/1										
1	1/2	1/2									
2	1/3	1/2	1/6								
3	1/4	1/2	1/4	0							
4	1/5	1/2	1/3	0	-1/30						
5	1/6	1/2	5/12	0	-1/12	0					
6	1/7	1/2	1/2	0	-1/6	0	1/42				
7	1/8	1/2	7/12	0	-7/24	0	1/12	0			
8	1/9	1/2	2/3	0	-7/15	0	2/9	0	-1/30		
9	1/10	1/2	3/4	0	-7/10	0	1/2	0	-3/20	0	
10	1/11	1/2	5/6	0	-1/1	0	1/1	0	-1/2	0	5/66
$\vdots$	…										

3 Der Name

Manfred Tietze wies mich darauf hin, dass die rechte Kante dieses Dreiecks die Bernoulli'schen Zahlen seien. Jacob Bernoulli hat die nach ihm benannten Zahlen bei der Beschäftigung mit den Potenzzahlen gefunden. Daher schlage ich vor, dieses Dreieck nach ihm Bernoullidreieck zu nennen.

4 Das Werkzeug

Das geeignete Werkzeug, um der obigen Einladung zu folgen, ist die Vollständige Induktion. Erfreulicherweise fällt dabei die Formel für die Koeffizienten $a_{k,i}$ nebenbei an! Im Folgenden wird die Vollständige Induktion zunächst auf die Kubikzahlen und dann auf beliebige Exponenten angewendet.

5 Kubikzahlen

Eine geläufige Vorgehensweise, die Formel für die Kubikzahlen

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{1}{4} \cdot n^4 + \frac{1}{2} \cdot n^3 + \frac{1}{4} \cdot n^2 + \frac{0}{1} \cdot n^1$$

zu beweisen, ist die Vollständige Induktion. Da letztlich die Formel für beliebige natürlichzahlige Exponenten gesucht wird, gehe ich in diesem Kubikzahlenbeispiel von unbekannten a_0, a_1, a_2, a_3 aus.

Vermutung: Es gibt a_0, a_1, a_2, a_3 für die gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \sum_{i=0}^{3} a_i \cdot n^{4-i}$$

Für den Induktionsanfang $n = 1$ gilt

$$1^3 = a_0 1^4 + a_1 1^3 + a_2 1^2 + a_3 1^1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

Für den Induktionsschluss ist zu zeigen:

$$\begin{array}{rccccccccc} & a_0 n^4 & + & a_1 n^3 & + & a_2 n^2 & + & a_3 n^1 & + & (n+1)^3 \\ = & a_0(n+1)^4 & + & a_1(n+1)^3 & + & a_2(n+1)^2 & + & a_3(n+1)^1 & & \end{array}$$

Linke Seite

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 n^4 & + & a_1 n^3 & + & a_2 n^2 & + & a_3 n^1 & & \\ & + & \binom{3}{0} n^3 & + & \binom{3}{1} n^2 & + & \binom{3}{2} n^1 & + & \binom{3}{3} n^0 \end{array}$$

Rechte Seite

$$\begin{array}{r} a_0\binom{4}{0}n^4 + a_0\binom{4}{1}n^3 + a_0\binom{4}{2}n^2 + a_0\binom{4}{3}n^1 + a_0\binom{4}{4}n^0 \\ + a_1\binom{3}{0}n^3 + a_1\binom{3}{1}n^2 + a_1\binom{3}{2}n^1 + a_1\binom{3}{3}n^0 \\ + a_2\binom{2}{0}n^2 + a_2\binom{2}{1}n^1 + a_2\binom{2}{2}n^0 \\ + a_3\binom{1}{0}n^1 + a_3\binom{1}{1}n^0 \end{array}$$

Auf der linken Seite die erste Zeile und auf der rechten Seite die linke untere Diagonale (rote Summanden) subtrahieren sich heraus.

Auf der rechten Seite wird die waagerechte auf eine senkrechte Summation umgestellt. Dann wird die rechte Seite auf die linke Seite geholt. Gleiche Potenzen werden zusammengefasst und ausgeklammert!

Linke Seite = rechte Seite:

$$\begin{array}{rl} & n^3 \cdot \left[\binom{3}{0} - a_0\binom{4}{1}\right] \\ + & n^2 \cdot \left[\binom{3}{1} - a_0\binom{4}{2} - a_1\binom{3}{1}\right] \\ + & n^1 \cdot \left[\binom{3}{2} - a_0\binom{4}{3} - a_1\binom{3}{2} - a_2\binom{2}{1}\right] \\ + & n^0 \cdot \left[\binom{3}{3} - a_0\binom{4}{4} - a_1\binom{3}{3} - a_2\binom{2}{2} - a_2\binom{1}{1}\right] \\ = & 0 \end{array}$$

Nun haben wir eine Gleichung mit vier Unbekannten! Wie geht es weiter?
Die Gleichung kann durch Nullsetzung der eckigen Klammern befriedigt werden!
Es gilt also:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\binom{3}{0} & - & \binom{4}{1}a_o & & & & & & & = & 0 \\
\binom{3}{1} & - & \binom{4}{2}a_o & - & \binom{3}{1}a_1 & & & & & = & 0 \\
\binom{3}{2} & - & \binom{4}{3}a_o & - & \binom{3}{2}a_1 & - & \binom{2}{1}a_2 & & & = & 0 \\
\binom{3}{3} & - & \binom{4}{4}a_o & - & \binom{3}{3}a_1 & - & \binom{2}{2}a_2 & - & \binom{1}{1}a_3 & = & 0
\end{array}$$

Daraus folgen

$$a_0 = \frac{\binom{3}{0}}{4} = \frac{1}{4}$$

$$a_1 = \frac{\binom{3}{1} - \binom{4}{2}a_0}{3} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{\binom{3}{2} - \sum_{m=0}^{1}\binom{3-m+1}{2-m+1}a_m}{2} = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{\binom{3}{3} - \sum_{m=0}^{2}\binom{3-m+1}{2-m+1}a_m}{1} = \frac{0}{1}$$

Allgemein

$$a_i = \frac{\binom{3}{i} - \sum_{m=0}^{i-1}\binom{3-m+1}{i-m+1}a_m}{3-i+1} \tag{1}$$

Nebenbei bemerkt:

Für a_0 ist die obere Summationsgrenze kleiner als die untere. Dies ist ein Beispiel aus der Praxis, einen solchen Fall als leere Summe mit dem Wert Null zu definieren.

Die rekursive Formel (1) bestimmt somit die Koeffizienten für die Summe der Kubikzahlen.

q.e.d.

6 Beliebige Exponenten

Vermutung: Es gibt $a_{k,0}, a_{k,1}, \cdots a_{k,k}$ für die gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} j^k = \sum_{i=0}^{k} a_{k,i} \cdot n^{k-i+1}$$

Für den Induktionsanfang $n = 1$ gilt

$$1^k = a_{k,0}1^{k+1} + a_{k,1}1^k + \cdots + a_{k,k}1^1 = a_{k,0} + a_{k,1} + \cdots + a_{k,k} = 1$$

Für den Induktionsschluss ist zu zeigen: (Statt der gemeinten Doppelindizierung $a_{k,i}$ ist aus Leserlichkeitsgründen a_i notiert.)

$$\begin{aligned} & a_0 n^{k+1} + a_1 n^k + a_2 n^{k-1} + \cdots + a_k n^1 + (n+1)^k \\ = {} & a_0 (n+1)^{k+1} + a_1 (n+1)^k + a_2 (n+1)^{k-1} + \cdots + a_k (n+1)^1 \end{aligned}$$

Linke Seite

$$\begin{aligned} & a_0 n^{k+1} + a_1 n^k + a_2 n^{k-1} + a_3 n^{k-2} + \cdots + a_k n^1 \\ & + \binom{k}{0} n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} + \binom{k}{2} n^{k-2} + \cdots + \binom{k}{k-1} n^1 + \binom{k}{k} n^0 \end{aligned}$$

Rechte Seite

$$\begin{aligned} & a_0 \binom{k+1}{0} n^{k+1} + a_0 \binom{k+1}{1} n^k + a_0 \binom{k+1}{2} n^{k-1} + a_0 \binom{k+1}{3} n^{k-2} + \cdots + a_0 \binom{k+1}{k+1} n^0 \\ & + a_1 \binom{k}{0} n^k + a_1 \binom{k}{1} n^{k-1} + a_1 \binom{k}{2} n^{k-2} + \cdots + a_1 \binom{k}{k} n^0 \\ & + a_2 \binom{k-1}{0} n^{k-1} + a_2 \binom{k-1}{1} n^{k-2} + \cdots + a_2 \binom{k-1}{k-1} n^0 \\ & \vdots \\ & + a_k \binom{1}{0} n^1 + a_k \binom{1}{1} n^0 \end{aligned}$$

Auf der linken Seite die erste Zeile und auf der rechten Seite die linke untere Diagonale (rote Summanden) subtrahieren sich heraus.

Auf der rechten Seite wird die waagerechte auf eine senkrechte Summation umgestellt. Dann wird die rechte Seite auf die linke Seite geholt; gleiche Potenzen werden zusammengefasst und ausgeklammert!

Linke Seite = rechte Seite

$$\begin{aligned} & n^k \cdot \left[\binom{k}{0} - a_0 \binom{k+1}{1} \right] \\ + \; & n^{k-1} \cdot \left[\binom{k}{1} - a_0 \binom{k+1}{2} - a_1 \binom{k}{1} \right] \\ + \; & n^{k-2} \cdot \left[\binom{k}{2} - a_0 \binom{k+1}{3} - a_1 \binom{k}{2} - a_2 \binom{k-1}{1} \right] \\ \vdots \; & \\ + \; & n^0 \cdot \left[\binom{k}{k} - a_0 \binom{k+1}{k+1} - \cdots - a_k \binom{1}{1} \right] \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

Nun haben wir eine Gleichung mit $k+1$ Unbekannten! Wie geht es weiter?

Die Gleichung kann durch Nullsetzung der eckigen Klammern befriedigt werden!

Es gilt also:

$$\begin{array}{lllllllllll}
\binom{k}{0} & - & \binom{k+1}{1}a_o & & & & & & & = & 0\\
\binom{k}{1} & - & \binom{k+1}{2}a_o & - & \binom{k}{1}a_1 & & & & & = & 0\\
\binom{k}{2} & - & \binom{k+1}{3}a_o & - & \binom{k}{2}a_1 & - & \binom{k-1}{1}a_2 & & & = & 0\\
\vdots & & & & & & & & & & \\
\binom{k}{k} & - & \binom{k+1}{k+1}a_o & - & \binom{k}{k}a_1 & - & \cdots & - & \binom{1}{1}a_k & = & 0
\end{array}$$

Daraus folgen

$$a_0 = \frac{\binom{k}{0}}{\binom{k+1}{1}}$$

$$a_1 = \frac{\binom{k}{1} - \binom{k+1}{2}a_0}{\binom{k}{1}}$$

$$a_2 = \frac{\binom{k}{2} - \sum_{m=0}^{1}\binom{k-m+1}{2-m+1}a_m}{\binom{k-1}{1}}$$

$$\vdots$$

Und es gilt für alle $a_{k,i}$ (Ab hier ist die DIN A5 Seitenbreite ausreichend, um den Index wieder als $a_{k,i}$ zu schreiben zu können.)

$$a_{k,i} = \frac{\binom{k}{i} - \sum_{m=0}^{i-1} a_{k,m}\binom{k-m+1}{i-m+1}}{k-i+1} \tag{2}$$

Damit ist die Gleichung aus dem Induktionsschluss erfüllt und die Koeffizienten $a_{k,i}$ sind bestimmt!

Und es gilt für Potenzsummen mit einem Natürlichen Exponenten k :

$$\sum_{j=1}^{n} j^k = \sum_{i=0}^{k} a_{k,i} \cdot n^{k-i+1} \tag{3}$$

mit $a_{k,i}$ aus der vorstehenden Formel (2).

q.e.d.

7 Eine Ähnlichkeit

Als eine weitere Begründung für den Namensvorschlag Bernoullidreieck mag die Ähnlichkeit mit dem Pascaldreieck gelten.

Pascaldreieck

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

Bernoullidreieck

	0	1	2	3	4
0	1/1				
1	1/2	1/2			
2	1/3	1/2	1/6		
3	1/4	1/2	1/4	0/1	
4	1/5	1/2	1/3	0/1	-1/30

In beiden Dreiecken werden die Elemente einer Zeile aus der darüber stehenden Zeile berechnet. Beispielhaft werden die grünen Elemente der vorherigen Zeile genutzt.

Pascaldreieck: In der Abbildung werden die beiden grünen Zahlen zu der roten Zahl addiert ($4 = 1 + 3$).

Bernoullidreieck: In der Abbildung wird die rote Zahl berechnet durch Multiplikation der darüber stehenen grünen Zahl mit dem Faktor $\frac{k}{k-i+1}$, wobei k der Exponent bzw. die Zeilennummer und i der i-te Koeffizient bzw. die i-te Spaltennummer des zu berechneten Elementes sind. Der Beweis folgt im Kapitel über die Spalten (9).

Im Beispiel ist die rote Zahl = grüne Zahl mal $\frac{k}{k-i+1}$ also

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{k}{k-i+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{4-2+1}$$

Die letzte Zahl einer Zeile, die ja keine obere Zahl hat, wird so berechnet, dass die Zeilensumme gleich Eins wird.

Beide Dreiecke liefern die Koeffizienten, wenn eine Summe potenziert (Pascal) bzw. wenn Potenzen summiert werden (Bernoulli).

Pascaldreieck ($b_{k,i}$ sind die Binomialkoeffizienten)

$$(x+y)^k = \sum_{i=0}^{k} b_{k,i} \cdot x^{k-i} \cdot y^i$$

Bernoullidreieck

$$\sum_{j=1}^{n} j^k = \sum_{i=0}^{k} a_{k,i} \cdot n^{k-i+1}$$

Beispiele

$$(x+y)^3 = 1 \cdot x^3 y^0 + 3 \cdot x^2 y^1 + 3 \cdot x^1 y^2 + 1 \cdot x^0 y^3$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4} \cdot n^4 + \frac{1}{2} \cdot n^3 + \frac{1}{4} \cdot n^3 + \frac{0}{1} \cdot n^1$$

Bernoulli'sches Dreieck	Pascal'sches Dreieck
$\sum_{j=1}^{n} j^k = \sum_{i=0}^{k} a_{k,i} \cdot n^{k-i+1}$ mit $a_{k,i} = \frac{\binom{k}{i} - \sum_{m=0}^{i-1} a_{k,m}\binom{k-m+1}{i-m+1}}{k-i+1}$	$(x+y)^k = \sum_{i=0}^{k} b_{k,i} \cdot x^{k-i} \cdot y^i$ mit $b_{k,i} = \binom{k}{i}$

Den Beweis für die Spaltenformel

$$a_{k+1,i} = a_{k,i} \cdot \frac{k}{k-i+1}$$

zeige ich im Kapitel 9 über die Spalten.

8 Bernoulli'sche Zahlen

In der nachfolgenden Tabelle werden zwei Varianten zur Berechnung der Bernoulli'schen Zahlen visualisiert.

Koeffizienten $a_{k,i}$

$a_{k,i}$		i				
		0	1	2	3	4
k	0	1/1				
	1	1/2	1/2			
	2	1/3	1/2	1/6		
	3	1/4	1/2	1/4	0/1	
	4	1/5	1/2	1/3	0/1	-1/30

Die gelbe Diagonale entspricht der klassischen Formel, wie sie im Anhang laut Wikipedia beschrieben wird.

$$B_k = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \frac{B_i}{k-i+1} \tag{4}$$

In der grünen Waagerechten wird die rote Bernoullizahl nach der Formel für die $a_{k,i}$ berechnet, wie sie in Kapitel 6 entwickelt wurde. A_k ist dabei das letzte Glied der Folge

$$a_{k,i} = \frac{\binom{k}{i} - \sum_{m=0}^{i-1} a_{k,m}\binom{k-m+1}{i-m+1}}{k-i+1}$$

mit $i = k$ also

$$A_k = a_{k,k} = \frac{\binom{k}{k} - \sum_{i=0}^{k-1} a_{k,i}\binom{k-i+1}{k-i+1}}{k-k+1} = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} a_{k,i} \tag{5}$$

Nun ergibt sich schon wieder eine Einladung: $A_k = B_k$ ist zu beweisen.

$$1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\binom{k}{i} - \sum_{m=0}^{i-1} a_{k,m} \binom{k-m+1}{i-m+1}}{k-i+1} = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \frac{B_i}{k-i+1} \tag{6}$$

minus 1, mal -1, mal (k-i+1), Summe auflösen ergibt

$$\binom{k}{i} - \sum_{m=0}^{i-1} a_{k,m} \binom{k-m+1}{i-m+1} = \binom{k}{i} B_i \tag{7}$$

und (wegen $i = k$)

$$1 - \sum_{m=0}^{i-1} a_{k,m} = B_k \tag{8}$$

schließlich wegen (5)

$$A_k = B_k \tag{9}$$

q.e.d

Was noch zu tun bleibt:

Zu der rekursiven ist eine explizite Formel entwickeln, wie es in dem nachfolgendem Kapitel über die Spalten gelungen ist.

9 Die Spalten

Die ersten Spalten des Bernoulli'schen Dreiecks sind

S_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$k=0$	$1/1$	$1/2$	$1/6$		$-1/30$		$1/42$		$-1/30$
$k=1$	$1/2$	$1/2$	$1/4$		$-1/12$		$1/12$		$-3/20$
$k=2$	$1/3$	$1/2$	$1/3$		$-1/6$		$2/9$		$-1/2$
$k=3$	$1/4$	$1/2$	$5/12$		$-7/24$		$1/2$		$-11/8$
$k=4$	$1/5$	$1/2$	$1/2$		$-7/15$		$1/1$		$-33/10$

Hier gibt es wieder eine Einladung, nämlich das allgemeine Bildungsgesetz für alle Spalten zu finden!

Die Offensichtlichkeit bei den Spalten 0 und 1 (Stammbruch und Konstanz) setzt sich leider bei den Spalten 2 und 3 nicht fort.

Angesichts der Zahlenfolge zum Beispiel

$$4.Spalte = -1/30, -1/12, -1/6, -7/24, -7/15, -7/10, -1/1, ...$$

bei der schon diese eine Folge Schwierigkeiten bereitet, (gar alle Folgen in eine geschlossene Formel zu zwingen, macht die Sache nicht leichter), verfolge ich daher den Ansatz einer iterative Entwicklung der ersten Folgen.

Seien k die Zeilen und i die Spalten in obiger Tabelle. Gesucht ist eine Funktion $f(k,i)$, mit deren Hilfe multiplikativ der direkte Nachfolger eines Spaltenelementes bestimmt werden kann.

Es soll also gelten

$$S_{k+1,i} = S_{k,i} \cdot f(k,i)$$

Die 0. und die 1. Spalte sind einzeln leicht zu beschreiben: Für die 0. Spalte gilt $S_{k+1,0} = S_{k,0} \cdot (k/(k+1))$ Wegen der gewünschten i-Abhängikeit muss jetzt noch i in die Funtion eingebracht werden. Das leistet $(k+i)/(k+1)$, weil mit i=0 der Summand 0 die Funktion unveränder lässt und mit i=1 die Konstanz der Spaltenelemente erreicht wird. Nun gehe ich mit Hoffnung an die weiteren Spalten heran:

```
anf Rvector (1/1, 1/2, 1/6, 0/1, -1/30, 0/1, 1/42, 0/1, -1/30, 0/1, 5/66);
for(i=0;i<=6;i++){
  $='i=',i,'\t';
  akt = anf[i];
  for(k=1;k<=5;k++){
    $=akt,'\t';
    akt = akt*(k+i)/(k+1);
  }
  $='\n';
}
Ausgabe
C:\tmp\bernoulli>reca -fx.reca
i=0  1/1  1/2  1/3  1/4   1/5
i=1  1/2  1/2  1/2  1/2   1/2
i=2  1/6  1/4  1/3  5/12   1/2
i=3  0/1  0/1    0/1  0/1   0/1
i=4 -1/30 -1/12 -1/6 -7/24 -7/15
i=5  0/1  0/1  0/1  0/1   0/1
i=6  1/42  1/12  2/9  1/2   1/1
i=7  0/1  0/1  0/1  0/1   0/1
i=8 -1/30 -3/20 -1/2 -11/8 -33/10
```

Heureka!

Als Nächstes sollte wohl für die heuristische Vermutung ein Beweis geführt werden, den ich mir aber für lange, langweilige Winterabende aufhebe. Stattdessen ziehe ich es vor, die iterative in eine geschlossene Formel zu wandeln. Iterativ gilt für das erste Folgeglied

$$f_{k+1} = f_k \cdot \frac{k+i}{k+1}$$

und für das s-te Folgeglied

$$f_{k+s} = \left[f_k \cdot \frac{k+i}{k+1}\right] \cdot \frac{(k+1)+i}{(k+1)+1} \cdot \ldots \cdot \frac{(k+s)+i}{(k+s)+1}$$

In der 0-ten Spalte erhält man das (k+1) te Glied durch Multiplikation mit dem Faktor $\frac{k}{(k+1)}$

$$\begin{aligned}
S_1 &= S_0 \cdot {}^1\!/_{1+1} = {}^1\!/_2 \\
S_2 &= S_1 \cdot {}^2\!/_{2+1} = {}^1\!/_3 \\
&\vdots \\
S_k &= S_{k-i} \cdot {}^k\!/_{k+1} = {}^1\!/_{k+1}
\end{aligned}$$

Wenn i nur 0 oder 1 sein kann, funktioniert der Faktor ${}^{(k+i)}\!/_{(k+1)}$ für beide Spalten

$$\begin{aligned}
S_{(0,k)} &= S_{(0,k-1)} \cdot {}^1\!/_{1+1} = {}^1\!/_2 \\
S_{(1,k)} &= S_{(1,k-1)} \cdot {}^{(1+1)}\!/_{(1+1)} = {}^1\!/_2 \\
&\vdots \\
S_{i,k} &= S_{i,k-1} \cdot {}^{k+1}\!/_{(k+1)} = {}^{(k+1)}\!/_{(k+1)}
\end{aligned}$$

Damit der Faktor auch für die Spalte 1 gilt, muss das i geeignet in diesen Faktor eingebracht werden.

$$f_i = \frac{k+i}{k+1}$$

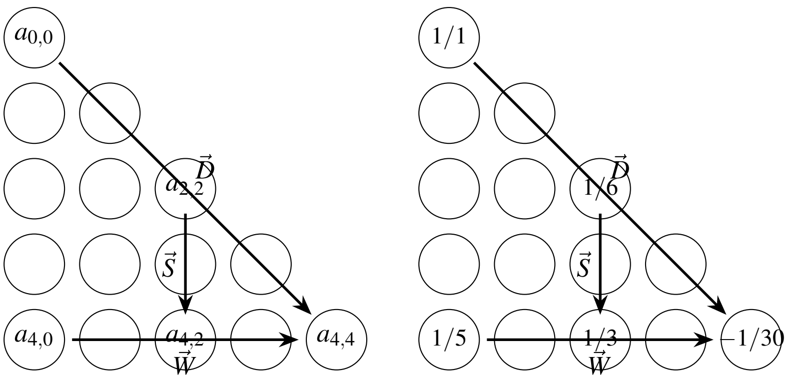
kann das leisten, denn für $i = 0$ bleibt $\frac{k+0}{k+1}$ unverändert und für $i = 1$ wird $\frac{k+i}{k+1}$ gleich Eins.

Nun wäre es schön, wenn dieser Faktor f_i auch für $i = 2$ gültig bliebe.

$$\begin{aligned}
S_{(2,1)} &= S_{(2,0)} \cdot {}^{(k+1)}\!/_{1+1} = {}^1\!/_4 \\
S_{(2,k)} &= S_{(2,k-1)} \cdot {}^{(1+1)}\!/_{(1+1)} = {}^1\!/_3 \\
&\vdots \\
S_{2,k} &= S_{2,k-1} \cdot {}^{k+2}\!/_{(k+1)} = {}^{(k+1)}\!/_{(k+1)}
\end{aligned}$$

10 Vektoren

Die Anmutung einer Vektorgeometrie erhält man, wenn man die Werte $a_{k,i}$ des Bernoulli-Dreiecks in ein geeignetes (k,i) - Koordinatensystem einträgt und die Pfeile von Punkt zu Punkt mit Rechenvorschriften assoziiert.



Die Diagonale

Für den diagonalen Pfeil $\vec{D} = a_{0,0} \to a_{4,4}$ gilt die Formel, die rekursiv alle vorherigen Werte $a_{0,0}, a_{1,1}, a_{2,2}...$ benötigt

$$a_{k,k} = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k}{m} \frac{a_{m,m}}{k-m+1}$$

Mit dem folgenden Recapis-Programm gleiche ich die Formel mit einer Nachrechnung des Beispiels aus der Grafik ab.

```
function a (k) {
  if (k<=0) return 1/1;
  sum=0/1;
  for(m=0;m<=k-1;m++)
    sum +=  (k bino m) * a(m)
          / (k-m+1);
  return 1-sum;
}
$ = a(4); // gibt korrekt -1/30 aus
```

Die Waagerechte

Für den waagerechten Pfeil $\vec{W} = a_{4,0} \to a_{4,4}$ gilt die Formel, die rekursiv alle vorherigen Werte $a_{4,0}, a_{4,1}, a_{4,2}...$ benötigt

$$a_{k,i} = \frac{\binom{k}{i} - \sum_{m=0}^{i-1} \binom{k-m+1}{i-m+1} a_{k,m}}{k-i+1}$$

Mit dem folgenden Recapis-Programm gleiche ich die Formel mit einer Nachrechnung des Beispiels aus der Grafik ab.

```
function a (k,i) {
  if (k<=0) return 1/1;
  sum=0/1;
  for(m=0;m<=i-1;m++)
    sum +=  ((k-m+1) bino (i-m+1)) * a(k,m);
  return   ((k bino i)-sum)
         / (k-i+1);
}
$ = a(4,4); // gibt korrekt -1/30 aus
```

Die Senkrechte

Für die senkrechten Pfeile nach unten gilt

$$a_{k+s,i} = a_{k,i} \cdot \frac{(k+s)! \cdot (k-i+1)!}{k! \cdot (k-i+s+1)!}$$

Für die senkrechten Pfeile nach oben gilt

$$a_{k-s,i} = a_{k,i} \cdot \frac{(k-i+1)! \cdot (k-s)!}{k! \cdot (k-i-s+1)!}$$

```
// Von a(2,2)=1/6  2 Schritte nach unten sollte 1/3 ergeben
function fak(n)
  if(n<=1) return 1;
  else return n*fak(n-1);
k=2; // zeile
i=2; // spalte
s=2; // schritte
erg=(1/6) *
  (   fak(k+s) * fak(k-i+1)   )
  / ( fak(k)   * fak(k-i+s+1) );
$='Ergebnis = ',erg,'\n'; // gibt korrekt 1/3 aus

// Von a(4,2)=1/3  2 Schritte nach oben sollte 1/6 ergeben
k=4; // zeile
i=2; // spalte
s=2; // schritte
erg=(1/3) *
  (   fak(k-i+1) * fak(k-s)     )
  / ( fak(k)     * fak(k-i-s+1) );
$='Ergebnis = ',erg,'\n'; // gibt korrekt 1/6 aus

dim=11;
for(i=0;i<dim;i++)$='\t',i;
$='\n';
B Rvector (dim);
for(n=0;n<dim;n++){
  B[n]= 1
  - (1/(n+1))
  * summe( (k=0)
  , k<=n-1
  ,(n+1) bino k * B[k]
  );
  $='\t',B[n];
}
$='\n';
```

11 Anhang

Es gibt zwei Varianten der Bernoulli'schen Zahlen

$B_i^+ = 1; +1/2; 1/6; 0; -1/30; 0; 1/42; 0; -1/30; 0; 5/66$
$B_i^- = 1; -1/2; 1/6; 0; -1/30; 0; 1/42; 0; -1/30; 0; 5/66$
die sich lediglich im Vorzeichen bei b_1 unterscheiden.

Die deutsche Wikipedia
https://de.wikipedia.org/wiki/Bernoulli-Zahl#Rekursionsformeln
kennzeichnet die Variante mit dem positiven B_1 mit einem Stern und verwendet die Formel

$$B_n^* = 1 - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k^* \tag{10}$$

Die englische Wikipedia
https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_number#Recursive_definition
nutzt ein hochgestelltes Vorzeichen für die beiden Varianten und verwendet die Formel 10

$$B_m^+ = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \frac{B_k^+}{m-k+1}$$

Die beiden Formeln sind gleichwertig.

```
dim=5;
A Rvector (dim);
  for(i=0;i<=4;i++){
    A[i]=  1
         -   (1/(i+1))
           * summe( (m=0)
                   , m<=i-1
                   ,(i+1) bino m * A[m]
                  );
  }
  $=A[4];

// Bernoulli-Zahlen nach Wikipedia
// https://de.wikipedia.org/wiki/Bernoulli-Zahl\#Rekursionsformeln
dim=11;
for(i=0;i<dim;i++)$='\t',i;
$='\n';

B Rvector (dim);
  for(n=0;n<dim;n++){
    B[n]=  1
```

```
          -   (1/(n+1))
            * summe( (k=0)
                    , k<=n-1
                    ,(n+1) bino k * B[k]
                   );
    $='\t',B[n];
  }
$='\n';

// Bernoulli-Zahlen aus Bernoulli-Dreieck
// die letzte Zahl jeder Zeile
A Rvector (dim);
for(k=0;k<dim;k++){
  for(i=0;i<=k;i++){
    A[i]=  1
          -   (1/(i+1))
            * summe( (m=0)
                    , m<=i-1
                    ,(i+1) bino m * A[m]
                   );
  }
  $='\t',A[k];
}
$='\n';
```