Alles Neun oder was?

Wenn man eine Zahl mit Neun malnimmt und dann wiederholt die Quersumme bildet, erhält man Neun. Beispiel

33 * 9 = 297;   2 + 9 + 7 = 18;   1 + 8 = 9;   Ach!

Hier nun der Beweis, dass das für beliebige natürliche Zahlen gilt. Das wiederholte Quersummieren kann für den Beweis auf einfaches Quersummieren verkürzt werden, weil der Satz

$\boxed{\text{Die Quersumme eines Neunervielfachen ist wieder ein Neunervielfaches.}}$

wenn er denn stimmt, trivialerweise auch beim Wiederholen seine Gültigkeit behält. Sei x eine beliebige natürliche Zahl nach Voraussetzung. $x * 9$ ist ebenfalls eine natürliche Zahl. Für jede natürliche Zahl gibt es eine Polynomdarstellung von Zehnerpotenzen. Es gilt daher

$$\frac{a_0 * 10^n + a_1 * 10^{n-1} + \ldots\ + a_n * 10^0}{9} \in \mathcal{N} \tag{1}$$

Die Quersumme einer natürlichen Zahl ist die Summe der Koeffizienten des Zehnerpotenzenpolynoms. Wenn diese Quersumme ein Neunervielfaches sein soll, muss die Division durch Neun eine natürliche Zahl sein.

$$\frac{a_0 + a_1 + \ldots\ + a_n}{9} \in \mathcal{N} \tag{2}$$

Als hinreichende Bedingung dafür, dass (2) eine natürliche Zahl ist, kann gelten, dass die Differenz von (1) und (2) eine natürliche Zahl ist. Es muss also ein natürliches z existieren, für das gilt

$$(\frac{a_0 * 10^n}{9} + \frac{a_1 * 10^{n-1}}{9} + \ldots + \frac{a_n * 10^0}{9}) - (\frac{a_0}{9} + \frac{a_1}{9} + \ldots + \frac{a_n}{9}) = z \tag{3}$$

Umformen: a_i -Glieder zusammenfassen, das a_n -Glied subtrahiert sich heraus, die übrigen a_i -Glieder werden ausgeklammert.

$$\frac{a_0 * (10^n - 1)}{9} + \frac{a_1 * (10^{n-1} - 1)}{9} + \ldots + \frac{a_{n-1} * (10^1 - 1)}{9} = z \tag{4}$$

Da eine Zehnerpotenz (Exponent > 0) minus 1 ein Neunervielfaches ist, lassen sich alle Glieder ganzzahlig durch 9 kürzen. z ist daher natürlich.

Q. e. d.